模块四 分段函数问题

第 1 节 分段函数常规题型（★★☆）

内容提要

本节主要归纳三类常见的分段函数题型.

1．分段函数求值：包括给自变量求函数值，给函数值求自变量. 我们将从最简单的给分段函数 $f(x)$ 的解析式，让求 $f(x_0)$ 这类求值问题出发，演变到求 $f(f(x_0))$，再到给 $f(x_0)$，让求 x_0，以及给 $f(f(x_0))$，求 x_0 等一系列问题，通过解决这些问题，我们可以逐步感悟分类讨论、数形结合的数学思想在解决分段函数问题中的广泛应用.

2．根据分段函数的单调性求参数范围：这类题考虑下面两点即可.

①每一段的单调性；②分段点左右两侧的大小.

3．等高线问题：例如，题干给出分段函数 $f(x)$ 满足 $f(m)=f(n)$，让求某个关于 m 和 n 的式子的取值范围，这类题常设 $f(m)=f(n)=t$，将 m 与 n 都用 t 表示，再代入目标代数式求范围.

典型例题

类型Ⅰ：分段函数求值

【例 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1,x>2\\x^2+2,x\le 2\end{cases}$，则 $f(2)=$______.

解析：2 位于 $x\le 2$ 这段，代入解析式即可，$f(2)=2^2+2=6$.

答案：6

【变式 1】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1,x>2\\x^2+2,x\le 2\end{cases}$，则 $f(f(1))=$______.

解析：双层函数值计算，先计算里面那一层，$f(1)=1^2+2=3$，所以 $f(f(1))=f(3)=3-1=2$.

答案：2

【变式 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1,x>2\\x^2+2,x\le 2\end{cases}$，若 $f(a)=3$，则 $f(a-1)=$______.

解析：因为不确定 a 与 2 的大小关系，所以通过分类讨论，代入解析式，

当 $a>2$ 时，则 $f(a)=a-1=3$，解得：$a=4$，所以 $f(a-1)=f(3)=3-1=2$；

当 $a\le 2$ 时，则 $f(a)=a^2+2=3$，解得：$a=\pm 1$，

若 $a=-1$，则 $f(a-1)=f(-2)=(-2)^2+2=6$；若 $a=1$，则 $f(a-1)=f(0)=0^2+2=2$；

综上所述，$f(a-1)=6$或 2.

答案：6 或 2

【总结】对于分段函数，若给自变量求函数值，只需注意该代哪一段即可；而若给函数值，让求自变量，则需讨论自变量在各段的情形.

【例 2】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1,x>2\\x^2+2,x\le 2\end{cases}$，若 $f(f(x))=2$，则 $x=$______.

解析：看到复合结构的方程，考虑将内层的 $f(x)$ 换元，化整为零，

令 $t=f(x)$，则 $f(f(x))=2$ 即为 $f(t)=2$，

下面先由此解 t，因为 $f(x)$ 的解析式较为简单，容易画图，所以可结合图象来解方程 $f(t)=2$，

函数 $y=f(t)$ 的图象如图 1，由图可知直线 $y=2$ 与该图象有 A，B 两个交点，横坐标分别为 0 和 2，

所以方程 $f(t)=2$ 的解为 $t=0$ 或 3，故 $f(x)=0$ 或 $f(x)=3$，

接下来又可通过观察直线 $y=0$ 和 $y=3$ 与 $f(x)$ 图象的交点，来解这两个方程，

如图 2，直线 $y=0$ 与 $y=f(x)$ 的图象没有交点，直线 $y=3$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 D，E，F 三个交点，

它们的横坐标分别为 -1，1，4，所以 $x=\pm 1$ 或 4.

答案：4 或 ± 1

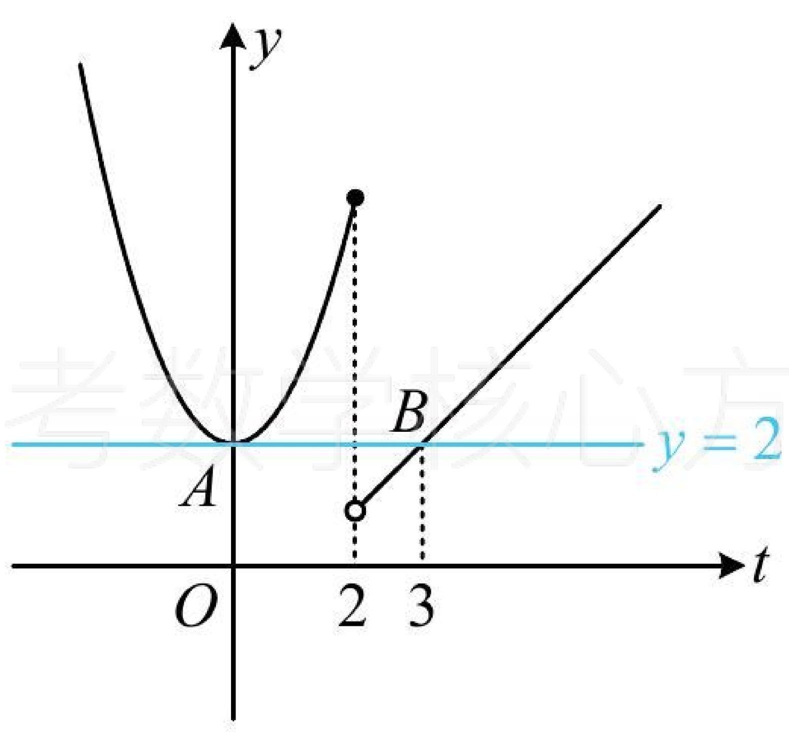


图1

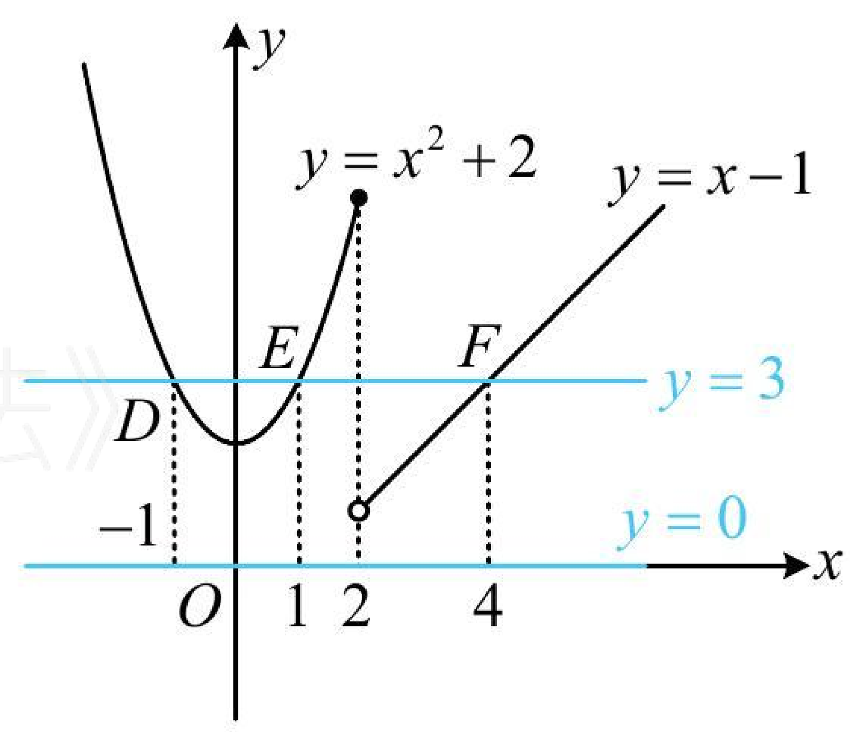


图2

【变式】已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-x,x\le 1\\\ln(x-1),x>1\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(f(x))-2$ 的零点个数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

解析：在零点问题中，看到复合函数结构 $f(f(x))$，一般会将内层换元成 t，先解 t，再解 x，

由题意，$g(x)=0\Leftrightarrow f(f(x))=2$，设 $t=f(x)$，则 $f(t)=2$，

可观察直线 $y=2$ 与 $y=f(t)$ 图象的交点来求解此方程，

如图 1，$f(t)=2$ 的解是 $t=-1$ 或 e^2+1，求出了 t，代回 $t=f(x)$，所以 $-1=f(x)$ 或 $\mathrm{e}^2+1=f(x)$，

如图 2，$g(x)$ 的零点个数即为直线 $y=-1$ 和 $y=\mathrm{e}^2+1$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点个数，

由图可知交点个数为 3，故选 C.

答案：C

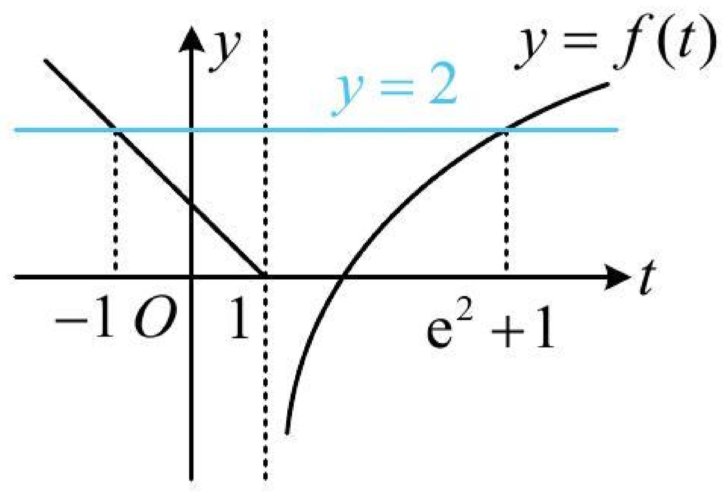


图1

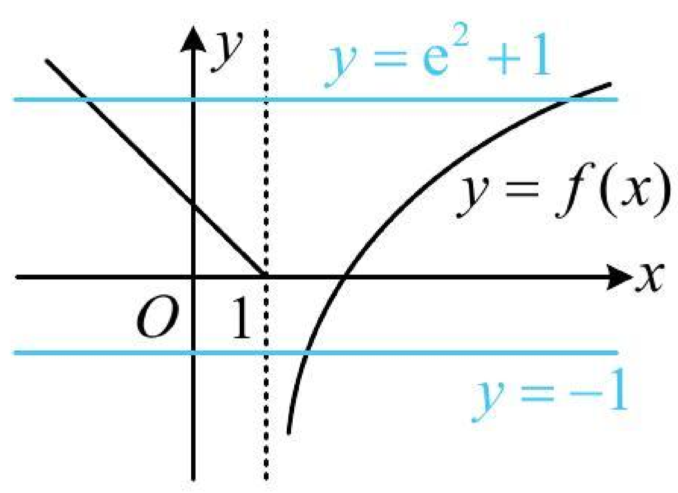


图2

【总结】研究复合结构 $y=f(f(x))$ 的零点，可令 $t=f(x)$，则 $y=f(t)$，先研究外层的 $y=f(t)$，再由 $t=f(x)$ 来研究 x 的情况.

类型Ⅱ：根据分段函数的单调性求参数范围

【例 3】已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x,x>1\\(4-\dfrac{a}{2})x+2,x\le 1\end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(1,+\infty)$　　（B）$[4,8)$　　（C）$(4,8)$　　（D）$(1,8)$

解析： 分段函数整体单调，分别考虑每一段的单调性，以及间断点处的拼接情况即可，

首先，$f(x)$ 在两段上均↗，所以 $\begin{cases}a>1\\4-\dfrac{a}{2}>0\end{cases}$，解得：$1<a<8$；

其次，间断点处，应有 $4-\dfrac{a}{2}+2\le a$，解得：$a\ge 4$，故实数 a 的取值范围为 $[4,8)$.

答案： B

【变式】已知函数 $f(x)=\begin{cases}(4-a)x-5,x\le 8\\a^{x-8},x>8\end{cases}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，且 $\{a_n\}$ 是递增数列，则实数 a 的取值范围为_____.

解析： $\{a_n\}$ 是递增数列 $\Rightarrow a_n<a_{n+1}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立 $\Rightarrow f(n)<f(n+1)$ 恒成立，

除了 $f(x)$ 在两段上要分别↗外，此处由于是数列 $\{f(n)\}$ ↗，所以间断点处只需 $f(8)<f(9)$ 即可，

所以应有 $\begin{cases}4-a>0\\a>1\\8(4-a)-5<a\end{cases}$，解得：$3<a<4$.

答案： $(3,4)$

【总结】给出分段函数的单调性，让求参数范围，这类题除了考虑各段的单调性外，还需注意间断点处的拼接情况，若为增函数，则间断点右侧不能在下方，若为减函数，则间断点右侧不能在上方.

类型Ⅲ：等高线问题

【例 4】已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1,x\ge 0\\x+1,x<0\end{cases}$，若 $m<n$，且 $f(m)=f(n)$，则 $n-m$ 的最大值是（　　）

（A）$\ln 2$　　（B）1　　（C）2　　（D）$\ln 3$

解析：欲求 $n-m$ 的最大值，可先通过设 t 统一变量，设 $f(m)=f(n)=t$，如图，由图可知 $0\le t<1$，

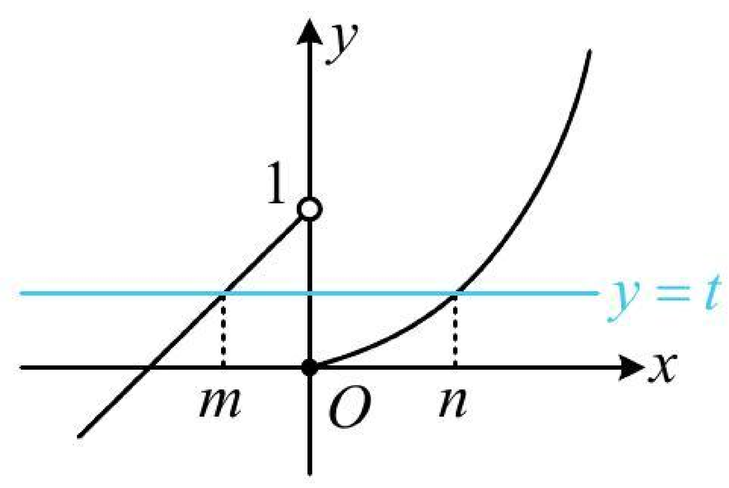
且 $m<0\le n$，所以 $f(m)=m+1=t\Rightarrow m=t-1$，$f(n)=\mathrm{e}^n-1=t\Rightarrow n=\ln(t+1)$，故 $n-m=\ln(t+1)-t+1$，

变量统一了，可把 $n-m$ 看成关于 t 的函数，求导研究最值，

设 $\varphi(t)=\ln(t+1)-t+1(0\le t<1)$，则 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t+1}-1=-\dfrac{t}{t+1}\le 0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $[0,1)$ 上↘，从而 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(0)=1$，故 $n-m$ 的最大值为 1.

答案：B



【总结】对于分段函数下出现的函数值相等条件，一般会设出等式（或连等式）的值，将变量统一，进而将题设问题转化为单变量函数问题来研究.

强化训练

1.（2023·贵州模拟·★）设 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{x-1},x<2\\ \log_3(x^2-1),x\ge 2\end{cases}$，则 $f(f(2))=$（　　）

（A）-1　　（B）1　　（C）2　　（D）4

2.（2023·四川成都七中模拟·★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}f(x+3),x\le 0\\ x^2-3x-4,x>0\end{cases}$，则 $f(f(-4))=$（　　）

（A）-6　　（B）0　　（C）4　　（D）6

3.（2022·河北模拟·★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2,x\le 1\\ -\log_2(x+1),x>1\end{cases}$，且 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$（　　）

（A）$-\dfrac{7}{4}$　　（B）$-\dfrac{5}{4}$　　（C）$-\dfrac{3}{4}$　　（D）$-\dfrac{1}{4}$

4.（★★★）已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-1$，若 $f(f(x))=1$，则 $x=$_____.

5.（2023·河南模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}0,x<1\\x+1,1\le x<2\\-\ln(x-1)+1,x\ge 2\end{cases}$，若 $f(f(a))=1$，则实数 $a=$（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

6.（2022·河南期末·★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\\log_2 x,x>0\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为_____.

7.（2022·甘肃模拟·★★★）若函数 $f(x)=\begin{cases}(a-1)x-2a,x<2\\\log_a x,x\ge 2\end{cases}$ 在 **R** 上单调递减，则实数 a 的取值范围为_____.

8.（2022·四川达州二诊·★★★）已知单调递增的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases}m^{n-9},n\ge 10\\(\frac{2m}{9}+1)n-21,n<10\end{cases}$，则实数 m 的取值范围是（　　）

（A）$[12,+\infty)$　（B）$(1,12)$　（C）$(1,9)$　（D）$[9,+\infty)$

9.（2023·江苏南京模拟·★★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x+1|,x\le 0\\ \ln x+1,x>0\end{cases}$，若方程 $f(x)=m(m\in\mathbf{R})$ 恰有 3 个不同的实数解 $a,b,c(a<b<c)$，则 $(a+b)c$ 的取值范围是_____.